

MEDIDAS EXPERIMENTALES DE LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE UN UN CÓDIGO AUTOADAPTATIVO hp PARA PROBLEMAS ABIERTOS ACELERADO MEDIANTE ACA

Rosa María Barrio Garrido⁽¹⁾, Luis Emilio García Castillo⁽¹⁾,

Ignacio Gómez Revuelto⁽²⁾ y Magdalena Salazar Palma⁽¹⁾.

rmbarrío@tsc.uc3m.es, luise@tsc.uc3m.es, igomez@diac.upm.es, salazar@tsc.uc3m.es

⁽¹⁾Dpto. Teoría de Señal y Comunicaciones. Universidad Carlos III de Madrid.

Escuela Politécnica Superior (Edificio Torres Quevedo). Avda. de la Universidad 30, 28911 Leganés (Madrid).

⁽²⁾Dpto. de Ingeniería Audiovisual y Comunicaciones. Universidad Politécnica de Madrid.

Resumen—The aim of the novel experimental measures presented in this paper is to show the improvement achieved in the computation time for a 2D self-adaptive hp finite element method (FEM) software accelerated through the Adaptive Cross Approximation (ACA) method. This algebraic method (ACA) was presented in an previous paper in the hp context for the analysis of open region problems, where the robust behaviour, good accuracy and high compression levels of ACA were demonstrated. The truncation of the infinite domain is settled through an iterative computation of the Integral Equation (IE) over a fictitious boundary, which, regardless its accuracy and efficiency, turns out to be the bottleneck of the code. It will be shown that in this context ACA reduces drastically the computational effort of the problem.

I. INTRODUCCIÓN

Un modo óptimo de truncar el dominio en un problema de radiación o dispersión analizado mediante el método de los elementos finitos (MEF), es el empleo de un método iterativo eficiente [1] que hace uso de la Ecuación Integral (EI) para representar el campo del dominio exterior. Sobre un contorno ficticio S se impone una condición de frontera exacta (de tipo Cauchy) que permite situar S muy cerca de las fuentes, reduciendo de esta forma el número de incógnitas del problema. La condición de frontera se actualiza a través de una serie de iteraciones, I , sobre los segundos miembros del sistema de ecuaciones MEF hasta alcanzar el grado de precisión deseado. A costa de realizar estas iteraciones y gracias a la implementación de dos fronteras (S y S') que descomponen el dominio del problema abierto en dos subdominios *solapados* (el dominio exterior a S' representado mediante la función de Green, y el dominio interior a S que será resuelto mediante MEF), este procedimiento conserva la naturaleza dispersa de las matrices de rigidez del MEF, a diferencia de otros métodos basados en la representación integral del campo. Esta característica permite el uso de resolvers eficientes, lo cual, junto con la rápida convergencia de las iteraciones necesarias, traslada el cuello de botella del procedimiento al cálculo convolucional de la EI sobre la frontera S .

Este método iterativo para problemas abiertos se ha hibridado con un sofisticado código hp auto-adaptativo [2], [3], donde se varía de forma completamente automática y simultánea el tamaño de los elementos del mallado, h , y el orden p empleado en la aproximación polinomial de la solución. La auto-adaptabilidad hp utilizada [4] adapta la malla a la solución del problema sin intervención externa, permitiendo refinamientos anisótropos que dan lugar a mallas de tipo 1-irregular con presencia de *nodos colgantes*, y presenta tasas de convergencia exponenciales incluso con singularidades de campo.

Para resolver el cuello de botella del método MEF iterativo en este contexto hp , y extender así las elevadas prestaciones del código auto-adaptativo al análisis electromagnético de problemas abiertos, se propuso en un trabajo anterior [5] el empleo de la Aproximación Cruzada Adaptativa (ACA) [6], [7] para el cálculo de la EI. ACA es un método puramente algebraico que acelera el cálculo de la matriz de la EI independiente de las incógnitas del sistema mediante una descomposición matricial de tipo LU .

En el trabajo citado [5] se explicaba brevemente la metodología utilizada, se validaba la implementación de ACA dentro del *software* hp para problemas abiertos, cuyo diagrama de bloques puede verse en la Fig. 1, se analizaba el buen comportamiento del umbral ϵ empleado para determinar el grado de precisión y compresión, que podían fijarse de antemano de manera sencilla y flexible, y se demostraba la robustez del procedimiento. En el presente trabajo se extienden los resultados presentados en [5] con las medidas experimentales de los tiempos de CPU consumidos por el cálculo de la Ecuación Integral (EI) acelerada con ACA en un contexto hp para problemas abiertos, en comparación con los tiempos de la integral sin acelerar.

II. RESULTADOS

Se analiza un problema de dispersión en 2D sobre un conductor perfecto con geometría circular, lo cual permite obtener el error respecto al campo analítico sobre S . En todos

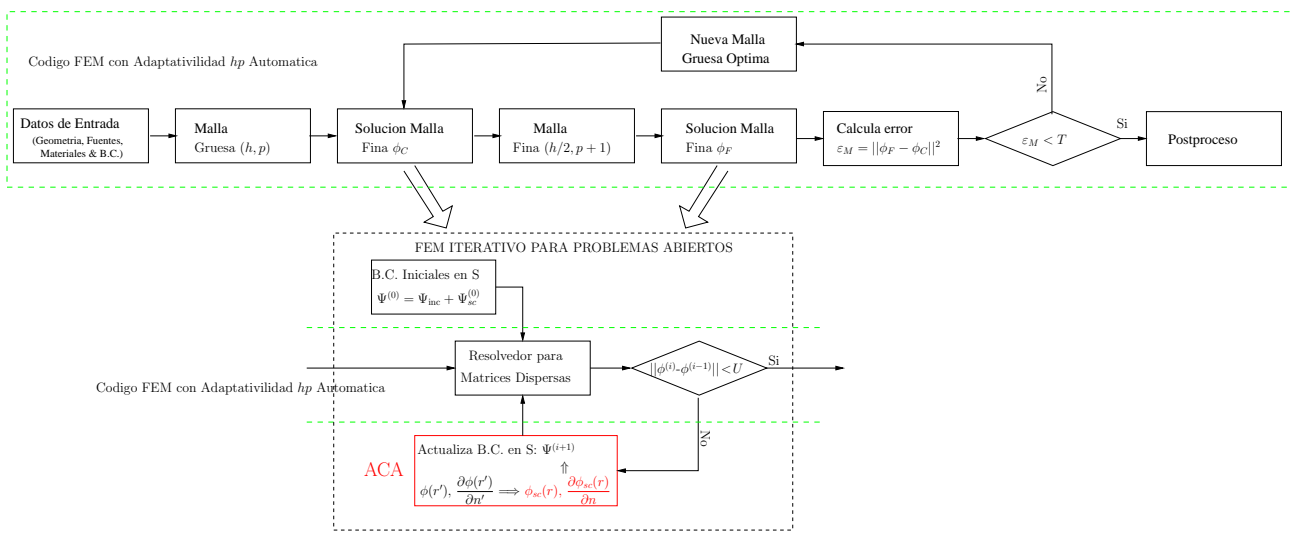


Figura 1. Diagrama de bloques del método auto-adaptativo hp combinado con el MEF iterativo para problemas abiertos acelerado con ACA

los casos considerados se ha adaptado el umbral del método iterativo para problemas abiertos, U , y de ACA, ϵ , de acuerdo a lo que se ha llamado estrategia de *umbrales subóptimos*: se eligen ambos umbrales de forma independiente entre sí y de forma independiente para cada valor de N (número de incógnitas sobre S), de manera que ninguno de los dos procedimientos influya apenas en el error de campo sobre S respecto a la solución exacta, pero permitiendo una muy ligera relajación respecto a dicho error. Esta ligera relajación supone un importante ahorro de recursos computacionales en algunos casos especialmente exigentes, sin perder apenas precisión.

El primer caso considerado, a tamaño eléctrico constante, es el de un PEC de radio $R = 5\lambda$ y una distancia entre las fronteras auxiliares S y S' de $0,5\lambda$. El número de incógnitas N se aumenta reduciendo el tamaño de los elementos de forma que la distancia entre incógnitas varía de $h^*/\lambda = 0,098$ a $h^*/\lambda = 0,0048$. Se ha distinguido entre N y N_{far} , que es la media de incógnitas consideradas lejanas por un grupo ACA. Una de las características del método hp es que éste permite el empleo de órdenes elevados (hasta $p = 9$ en la implementación utilizada). Por eso se han medido los tiempos de cálculo para tres órdenes diferentes, $p = 2$, $p = 4$ y $p = 8$. Los resultados se presentan en la Fig. 2, donde se observa como la complejidad cuadrática de la EI se reduce a una complejidad *lineal* en todos los casos gracias a la compresión de ACA. t_{INT} representa los tiempos de cálculo de la EI sin aceleración, considerando todas las iteraciones I del método para problemas abiertos. El valor t_{UV} representa *solo* los tiempos de cómputo de las matrices U y V resultantes de la descomposición matricial ACA. t_{UV} es independiente de I : la matriz ACA $Z = U \times V$ es independiente de las incógnitas del problema, por lo que el procedimiento ACA sólo se aplica una vez por mallado. Sin embargo, la matriz Z debe ser multiplicada por las incógnitas sobre S , u_i , que se actualizan en cada iteración I , para obtener el vector columna correspondiente a la actualización de la condición de contorno sobre S mediante la evaluación de la EI, o los segundos miembros del sistema de ecuaciones MEF: los tiempos t_{ACA} suman al valor de t_{UV} el tiempo consumido en dicha multiplicación $U \times V \times u_i$.

A continuación se varía el tamaño eléctrico del objeto dis-

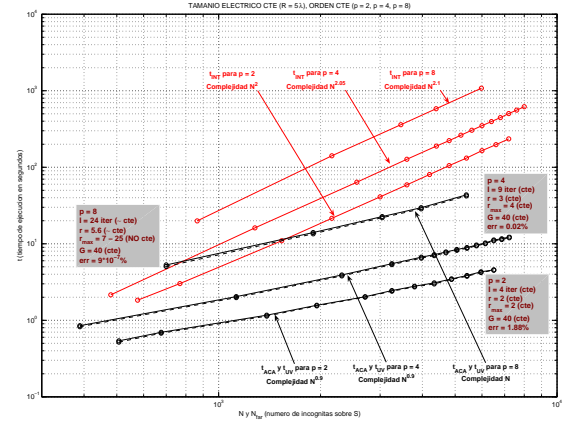
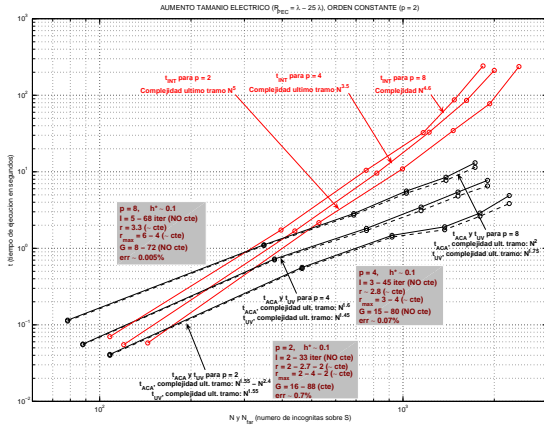


Figura 2. R/λ constante, orden constante $p = 2, 4, 8$.

persor, desde $R = \lambda$ hasta $R = 25\lambda$, manteniendo constante la distancia entre incógnitas $h^*/\lambda = 0,10$. Los resultados pueden verse en la Fig. 3 para tres órdenes diferentes $p = 2, 4$ y 8 . Las elevadas complejidades computacionales alcanzadas cuando se calcula la integral sin aceleración, se explican por el aumento del número de iteraciones necesarias I al aumentar el tamaño eléctrico del objeto. Esta circunstancia no influye en t_{UV} y lo hace de forma muy sutil en los tiempos totales de ACA, t_{ACA} , ya que los tiempos de la multiplicación $U \times V \times u_i$ son muy pequeños en comparación con el cálculo de U y V . De ahí que en los últimos tramos, o para los tamaños eléctricos mayores, donde la complejidad es en general más elevada, se observe por ejemplo una reducción de la complejidad de $O(N^{4,6})$ para t_{INT} con $p = 8$, a $O(N^2)$ para t_{ACA} y el mismo orden. En todo caso los tiempos de cálculo de ACA son menores en valor absoluto a los de la integral sin método rápido, excepto para tamaños eléctricos muy pequeños y órdenes elevados ($R/\lambda < 5\lambda$, $p = 8$), donde los tiempos consumidos son del orden de segundos y puede ser indiferente el empleo de un método rápido de integración.

Para comprobar el comportamiento de ACA en un refinamiento de tipo hp , se considera la variación del tamaño eléctrico del objeto al mismo tiempo que el orden polinomial, p , que en este caso implica una reducción efectiva del error



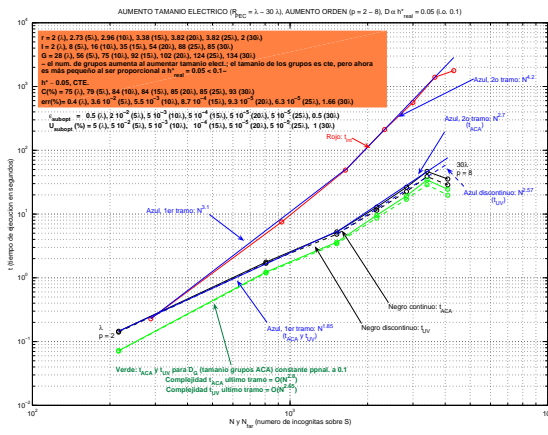


Figura 7. Tamaño grupos ACA más pequeño.

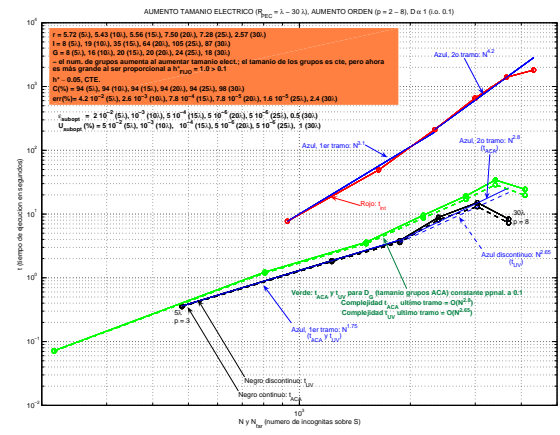


Figura 8. Tamaño grupos ACA mayor.

se ha incrementado en un factor de $\sqrt{2}$, pero la complejidad computacional apenas varía, incluso se reduce muy levemente, pasando a valer $O(N^{2,7})$ en los últimos tramos, en lugar de $O(N^{2,8})$. Los tiempos de CPU, sin embargo, se han incrementado ligeramente de acuerdo a lo esperado.

Si se aumenta el tamaño de los grupos ACA según $G = \sqrt{L_e}$, es decir, en un factor de $\sqrt{10}$ respecto al experimento de la Fig. 6, los tiempos de cálculo tienden a reducirse, así como la complejidad computacional; excepto que el incremento de rango r sea lo suficientemente pronunciado como para compensar la disminución del tiempo consumido en las interacciones entre los diferentes grupos ACA. Los resultados se observan en la Fig. 8. Efectivamente, los tiempos de t_{UV} y t_{ACA} se reducen ligeramente respecto a los tiempos de la Fig. 6, que se repiten en color verde en esta figura para facilitar la comparación. La complejidad computacional apenas es distinguible, no observándose ninguna mejoría en los últimos tramos. A pesar de la ligera reducción en los tiempos de cómputo, hay que hacer la advertencia de que a medida que los grupos ACA se hacen más grandes, el número medio de incógnitas consideradas lejanas, y por tanto, susceptibles de ser procesadas mediante el algoritmo ACA, disminuye. Esto implica, por un lado, una menor reducción del tiempo total de cálculo. Y, por otro, que en problemas muy pequeños con grupos ACA muy grandes, como sucede en la Fig. 8 para $R = \lambda$, ACA no pueda aplicarse.

III. CONCLUSIONES

Se ha calculado experimentalmente la complejidad computacional del método ACA en el contexto de un sofisticado *software hp* auto-adaptativo para problemas abiertos en 2D, cuya implementación fue validada en un trabajo anterior. Se ha analizado el problema estático y con variación del tamaño eléctrico, obteniendo en todos los casos una mejora significativa, tanto en los tiempos de cálculo en valor absoluto como en la evolución de dichos tiempos al aumentar el número de incógnitas; excepto posiblemente en problemas muy pequeños, que son de escasa relevancia práctica por los pocos recursos que consumen. Se ha considerado el caso, propio de *hp*, del aumento del orden p , observando una reducción de la complejidad desde $O(N^{4,2})$ en la pendiente de los tiempos consumidos cuando no se emplea método rápido de integración, hasta $O(N^{2,8})$ cuando la integral en la

frontera se calcula mediante ACA, así como una reducción de dos órdenes de magnitud en los valores absolutos de t . Las compresiones alcanzadas gracias a ACA superan en todos los casos el 70 %, llegando a estar por encima del 90 % para órdenes y tamaños eléctricos elevados. Se ha probado el método ACA con diferentes tamaños de grupos, G , comprobándose que el criterio para el número de grupos ACA $G = \sqrt{10L_e}$ es una buena elección de compromiso, siempre que la distancia entre incógnitas no esté muy por encima o por debajo de $h^*/\lambda = 0,10$. Queda demostrado el ahorro de recursos computacionales y el buen comportamiento de ACA para el cálculo rápido de la EI en un contexto de órdenes elevados como es *hp*.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación recibida por parte del Ministerio de Educación y Ciencia en el proyecto TEC2010-18175/TCM.

REFERENCIAS

- [1] L. E. Garcia-Castillo, I. Gomez-Revuelto, F. Saez de Adana, y M. Salazar-Palma. "A Finite Element Method for the Analysis of Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves on Complex Environments." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194/2-5:637–655, Feb. 2005.
- [2] I. Gomez-Revuelto, L. E. Garcia-Castillo, D. Pardo, y L. F. Demkowicz. "A Two-Dimensional Self-Adaptive *hp* Finite Element Method for the Analysis of Open Region Problems in Electromagnetics." *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4):1337–1340, Apr. 2007. doi:10.1109/TMAG.2007.892413.
- [3] L. E. Garcia-Castillo, I. Gomez-Revuelto, D. Pardo, y L. F. Demkowicz. "Metodo de Elementos Finitos con Adaptatividad *hp* Automatica para el Analisis de Problemas Abiertos." *XXI Simposium Nacional de la URSI*. Oviedo, Asturias (España), sep 2006.
- [4] L. Demkowicz. *Computing with hp Finite Elements. I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems*. Chapman & Hall/CRC Press, Taylor and Francis, 2007. ISBN 1-58488-671-4.
- [5] R. M. Barrio-Garrido, L. E. Garcia-Castillo, I. Gomez-Revuelto, y M. Salazar-Palma. "Aceleracion Mediante ACA de unCodigo Auto-adaptativo *hp* para el Analisis de Problemas Abiertos." *XXVII Simposium Nacional de la URSI*. Elche (Spain), sep 2012.
- [6] M. Bebendorf y S. Rjasanow. "Adaptive Low-Rank Approximation of Collocation Matrices." *Computing*, 70(1):1–24, Mar. 2003.
- [7] K. Zhao, M. N. Vouvakis, y J.-F. Lee. "The Adaptive Cross Approximation Algorithm for Accelerated Method of Moments Computations of EMC Problems." *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 47(4), Nov. 2005.